

2018年天津和平区理科高三一模数学试卷

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

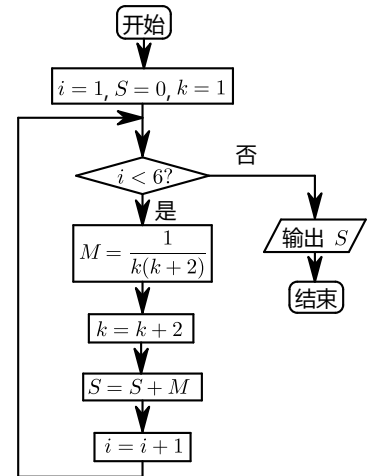
1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{x | 2 < x \leq 5\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B)$ 等于 () .

- A. $\{2, 3, 4, 5\}$ B. $\{1, 2, 5, 6\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{1, 6\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \\ 3x - y - 3 \leq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x + 2y$ 的取值范围是 () .

- A. $[1, 8]$ B. $[1, 7]$ C. $[1, 4]$ D. $[4, 8]$

3. 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，则输出的 S 的值为 () .



- A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{10}{11}$ D. $\frac{6}{13}$

4. 函数 $f(x) = \cos x(\sin x - \cos x) + 1$ 的最小正周期和最大值分别为 () .

- A. 2π 和 1 B. π 和 2 C. π 和 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D. 2π 和 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

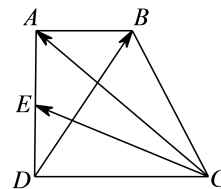
5. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 “ $|x+2| + |x-1| \leq 5$ ” 是 “ $-2 \leq x \leq 3$ ” 的 () .

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{3}{2}$, 过右焦点 F 作渐近线的垂线, 垂足为 M , 若 $\triangle FOM$ 的面积为 $\sqrt{5}$, 其中 O 为坐标原点, 则双曲线的方程为 () .

- A. $x^2 - \frac{4y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{2y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

7. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AD = DC = 2AB$, E 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{CE} + \mu \overrightarrow{DB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ().



- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

8. 若曲线 $y = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1 \\ \frac{2}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$ 与直线 $y = kx - 1$ 有两个不同的交点, 则实数 k 的取值范围是 ().

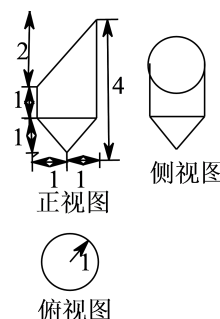
- A. $(5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6})$ B. $(0, 5 - 2\sqrt{6})$
C. $(-\infty, 5 - 2\sqrt{6})$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, 5 - 2\sqrt{6})$

二、填空题 (本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

9. 设 i 是虚数单位, a 为实数, 若复数 $a + \frac{10}{3+i}$ 是纯虚数, 则 $a =$ _____.

10. 若 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中的第4项为常数项, 则 n 的值为 _____.

11. 已知一个几何体的三视图如右图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积为 _____ cm^3 .



12. 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = \sqrt{3}t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 则它们公共点的坐标为 _____.

13. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = m$, 其中 m 为常数, 则 $y = \frac{4}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____.

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(-x) = f(x)$, 且当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2$, 函数 $g(x) = \left| \sin \left(\frac{3\pi x}{2} \right) \right|$, 则函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的零点个数为 _____.

三、解答题（本大题共6小题，共80分）

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 为三个内角，已知 $A = 45^\circ$ ， $\cos B = \frac{4}{5}$.

（1）求 $\sin C$ 的值.

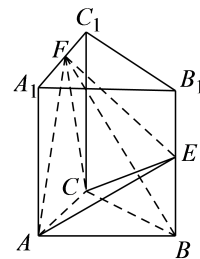
（2）若 $BC = 10$ ， D 为 AB 的中点，求 CD 的长及 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 对一批渔业产品进行抽测，从中随机抽取10件产品，测量该产品中某种元素的含量数据如下（单位：mg）：18, 13, 26, 8, 20, 25, 14, 22, 16, 24，并规定该产品中元素含量不少于15mg的为优质品.

（1）在这10件产品中，随机抽取3件，求这3件产品均为优质品的概率.

（2）在（1）条件下，设抽到的3件产品中优质品数为 X ，求 X 的分布列与数学期望 $E(X)$.

17. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = \sqrt{6}$, 点 E , F 分别为侧棱 BB_1 和边 A_1C_1 的中点.



- (1) 求证: $BF \perp$ 平面 ACE .
- (2) 求直线 AF 与平面 ACE 所成角的正弦值.
- (3) 求二面角 $F - CE - A$ 的余弦值.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n - 3)(n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 且 $b_2 = 5, b_1, b_3, b_{11}$ 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $c_n = \frac{1}{a_n(2b_n - 1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$, $x \in (0, e]$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极值点, 求 $f(x)$ 的单调区间和最大值.

(2) 是否存在实数 a , 使得 $f(x)$ 的最大值是 -3 ? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

(3) 设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, e]$, 在 (1) 条件下, 求证: $f(x) + g(x) + \frac{1}{2} < 0$.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 以原点为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $y = x + \sqrt{6}$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若 A, B 为椭圆 C 上关于 x 轴对称的任意两点, P 点坐标为 $(4, 0)$, 连接 PB 交椭圆 C 于另一点 D , 求证: 直线 AD 恒过 x 轴上的定点.

(3) 在 (2) 的条件下, 设 x 轴上的定点为 M , 若 AB 过椭圆 C 的左焦点, 求 $\triangle ABM$ 的面积.